Pevnost pružnost

2. přednáška

-Mocninový zákon

-Energie napjatosti (tah)

-Castiglianova věta

-Výpočet deform. dlouhé prizmatické tyče s uvážením vl.tíhy

-Zákon superpozice

-Mohrova kružnice pro jednoosou napjatost

-Prostý tlak

-Způsoby namáhání podle prof. BACHA

-Tlak ve stykové ploše dvou těles

Pevnostní podmínka v tahu

$$\sigma_{\max} = \frac{F}{S} \leq \sigma_{D,t}$$

Kde: F - vnější osová síla [N]

S - velikost průřezu [m^2]

$\sigma_{D,t}$ - dovolené napětí v tahu [MPa]

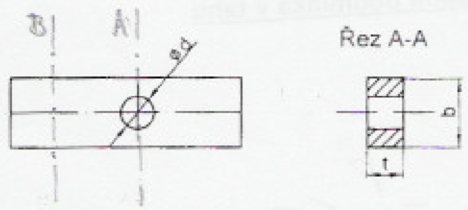
$\sigma_{d,t}$ **určíme:** - podle tabulek pro určitý materiál
- z výsledků zkoušky tahem

$$\sigma_{D,t} = \frac{\sigma_{k,t}}{k_k} \qquad \sigma_{D,t} = \frac{\sigma_{P,t}}{k_P}$$

Míra bezpečnosti $k_{(\,)}$

k_p = 4 až 6 - přísluší mezi pevnosti

k_k = 2 až 3 - přísluší mezi kluzu



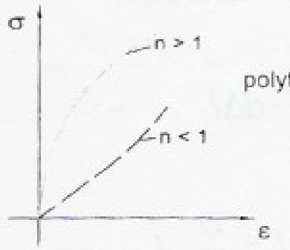
$$\sigma_B = \frac{F}{S_1} = \frac{F}{t \cdot b} \qquad \sigma_A = \frac{F}{S_2} = \frac{F}{(b-d) \cdot t}$$

$$\sigma_A > \sigma_B$$

<u>Nebezpečný průřez</u> – místo, kde je maximální napětí !

Zkouška tahem

Šedá litina



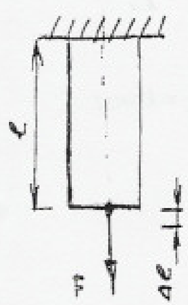
Mocninový zákon

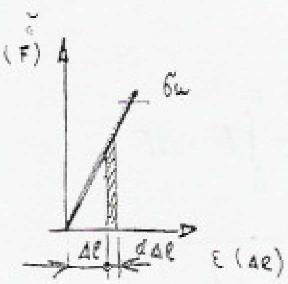
$$\varepsilon = \frac{\sigma^{n}}{E}$$

Litina n=1,1 ; žula n=1,3 ; řemen kožený n= 0,7

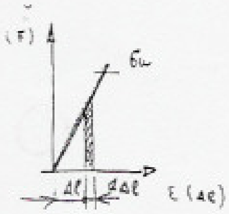
Deformační práce ,energie napjatosti (tah)

Síla F způsobí prodloužení tyče o Δl a vykoná deformační práci





Práce spotřebovaná na přetváření tyče osovou silou F



$$A = \int_0^F F \cdot d\Delta l$$

$$\Delta l = \varepsilon \cdot l = \frac{\sigma}{E} \cdot l$$

$$\Delta l = \frac{F \cdot l}{S \cdot E}$$

$$d\Delta l = \frac{l}{S \cdot E} \cdot dF$$

Výpočet práce spotřebovaná na přetváření tyče osovou silou F

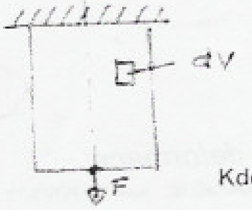
$$A = \int_0^F F \cdot \boxed{d\Delta l} \longrightarrow d\Delta l = \frac{l}{S \cdot E} \cdot dF$$

$$A = \frac{l}{S \cdot E} \int_0^F F \cdot dF$$

$$\frac{l}{S \cdot E} = konst$$

$$\boxed{A = \frac{F^2 \cdot l}{2 \cdot S \cdot E}}$$

Energie napjatosti je akumulována v celém objemu tyče.
Objemový element dV obsahuje energii dW

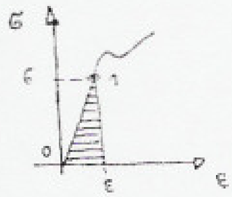


$$w = \frac{dW}{dV}$$

Kde: w - objemová hustota energie napjatosti [$J.m^{-3}$]

V případě nerovnoměrného rozložení napětí u tělesa /např. krut, ohyb/ je i energie napjatosti rozložena nerovnoměrně a objemová hustota energie w je funkcí polohy místa w = fce (x, y, z)

U prizmatické tyče, zatížené osovým tahem je σ = konst. ve všech místech → w = konst.



$$w = \frac{W}{V} = konst.$$

w - je rovno obsahu plochy pod diagramem

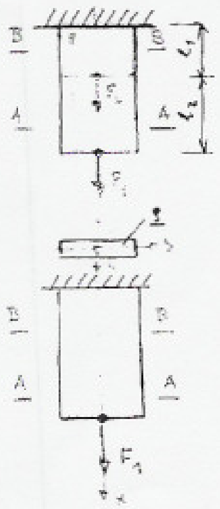
$$w = \frac{1}{2}\sigma \cdot \varepsilon$$

Mezi energií napjatosti **W** a vnější silou **F není lineární závislost**. (to platí také pro ***w*** a σ). Proto nesmíme používat pro určení *w nebo W* princip superpozice.

Poznámka: pro $\sigma > \sigma_E$ - *plastická deformace*
A se přemění v: - w ENERGIE NAPJATOSTI
- teplo

Podle zákona o zachování energie je práce spotřebovaná na přetvoření tyče /tzv. přetvárná práce/ rovna potenciální energii napjatosti tyče.
(Platnost v mezích Hookeova zákona)

Zákon SUPERPOZICE
Zákon superpozice platí pokud mezi silou a napětím je přímá úměrnost /lineární vztah/ *neplatí např. pro litinu.*

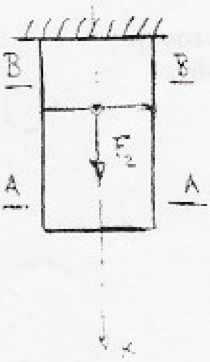


Napětí způsobené silou F_1 (F_2 = 0)

$$\sigma_{A1} = \frac{F_1}{S_1} \qquad \text{(v řezu A-A)}$$

$$\sigma_{B1} = \frac{F_1}{S_1} \qquad \text{(v řezu B-B)}$$

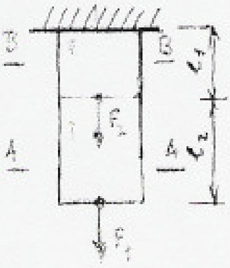
Napětí způsobené silou F_2 ($F_1 = 0$)



$$\sigma_{A2}=0$$

$$\sigma_{B2}=\frac{F_2}{S_1}$$

Výsledné napětí (od sil F_1 a F_2)



$$\sigma_A=\sigma_{A1}+\sigma_{A2}$$

$$\sigma_B=\sigma_{B1}+\sigma_{B2}$$

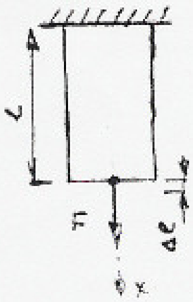
Výsledná deformace Δl

$$\Delta l=\Delta l_I+\Delta l_{II}$$

$$\Delta l=\frac{\sigma_A}{E}.l_2+\frac{\sigma_B}{E}.l_1$$

1. Castiglianova věta

Posuv v působišti vnější síly v jejím směru a smyslu je roven parciální derivaci celkové přetvárné práce podle této síly.



$$\Psi_i = \frac{\partial A}{\partial F_i}$$

Příklad výpočtu deformace tyče - jednoosá napjatost

Přetvárná práce

$$A = \frac{F^2 \cdot l}{2S \cdot E}$$

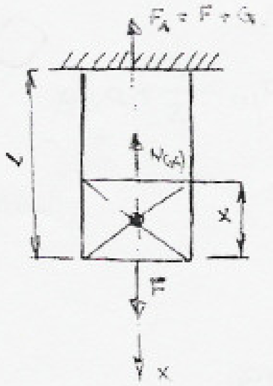
Posunutí Δl ve směru síly F (osy x)

$$\Delta l = \frac{\partial A}{\partial F}$$

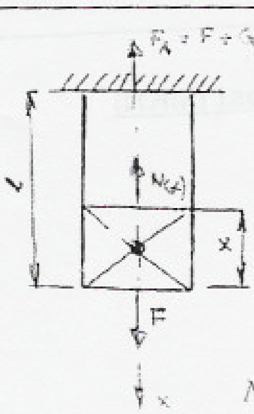
$$\Delta l = \frac{2 \cdot l \cdot F}{2 \cdot S \cdot E}$$

$$\boxed{\Delta l = \frac{F \cdot l}{S \cdot E}}$$

Výpočet deformace dlouhé prizmatické tyče s uvážením vlastní tíhy



G – tíha tyče (N)
S – plocha průřezu (m^2)
x – délka části l tyče (m)
ρ - hustota tyče ($kg.m^{-3}$)

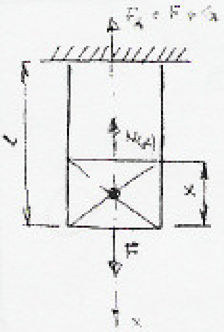


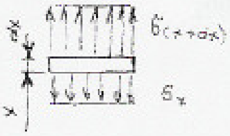
$$N_{(0)} = F$$

$$N_{(l)} = F + S.\overset{x}{\cancel{l}}.\rho.g$$

$$N_{(x)} = F + G_{(x)} = F + \rho.g.x.S$$

$$\sigma_{(x)} = \frac{N_{(x)}}{S}$$





$$\sigma_{(x)} = \frac{N_{(x)}}{S}$$

$$\sigma_{(x)} = \frac{F}{S} + \rho.g.x$$

Výpočet deformace

$$\Delta l = \int_{x=0} \frac{\sigma_{(x)}}{E}.dx = \int_{x=0} \frac{\frac{F}{S} + \rho g x}{E}.dx$$

$$\boxed{\Delta l = \frac{F.l}{S.E} + \frac{\rho g l^2}{2E}}$$

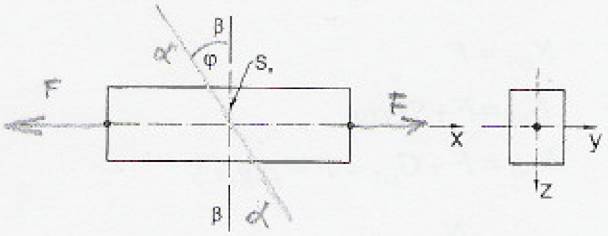
s uvážením vl. tíhy

Mohrova kružnice pro jednoosou napjatost (MKN)

Rovina β ⊥ osu x

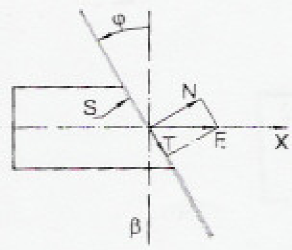
Rovina α není kolmá k x

Rovina α svírá s rovinou β úhel φ



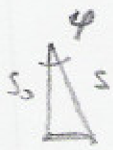
Podle Eulerovy metody myšleného řezu je oddělená část v rovnováze pod účinky sil F a F_v

$$\boxed{\overline{F}_v = \overline{T} + \overline{N}}$$



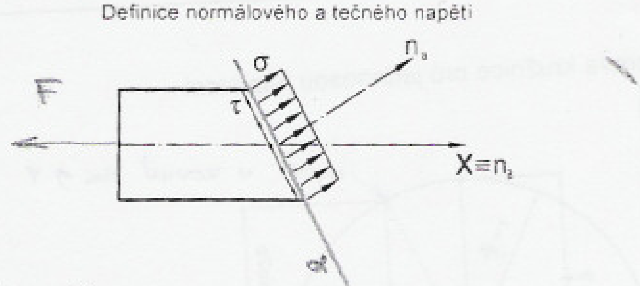
N = F_v . cos φ
T = F_v . sin φ
F_v = F

S = S_0/cos φ



$$\cos \varphi = \frac{S_0}{S} \Rightarrow S = \frac{S_0}{\cos \varphi}$$

Definice normálového a tečného napětí



Normálové napětí

$$\sigma = \frac{N}{s} = \frac{F\cos\varphi}{\frac{s_0}{\cos\varphi}} = \sigma_0.\cos^2\varphi$$

Tečné napětí

$$\tau = \frac{T}{s} = \frac{F\sin\varphi}{\frac{s_0}{\cos\varphi}} = \sigma_0.\sin\varphi.\cos\varphi$$

Matematické vyjádření Mohrovy kružnice pro jednoosou napjatost

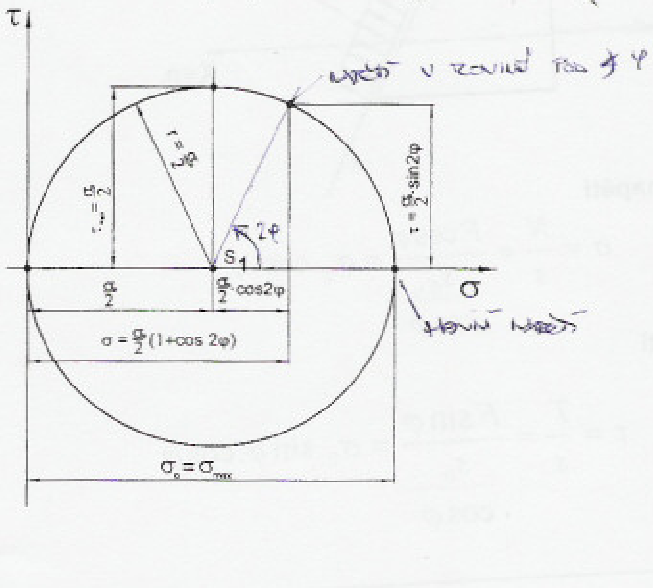
Po zavedení za $\varphi \rightarrow 2\varphi$ a po úpravě obdržíme rovnici kružnice ve tvaru

$$\boxed{\left(\sigma - \frac{\sigma_0}{2}\right)^2 + \tau^2 = \left(\frac{\sigma_0}{2}\right)^2}$$

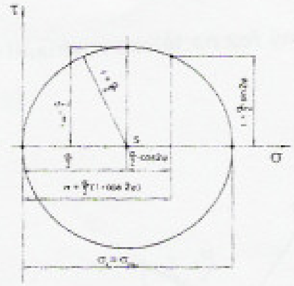
Kružnice je dána: S_1 [0.5 σ_o; 0]

$r = 0{,}5\ \sigma_o$

Mohrova kružnice pro jednoosou napjatost



Pravidla pro použití MKN



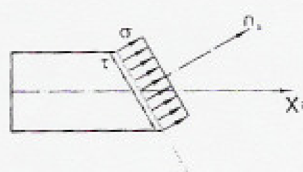
1. Bod MKN určuje svými souřadnicemi napjatost v odpovídající rovině (σ, τ)
2. Velikost středového úhlu 2φ v MKN je ve skutečnosti na tělese poloviční $\rightarrow \varphi$
3. Smysl středového úhlu 2φ MKN i úhel mezi rovinami α, β je stejný.

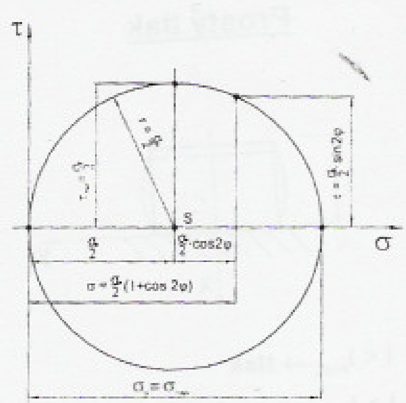
Znaménka normálového napětí:

$\sigma > 0$ - napětí má stejný smysl jako vnější normála +

$\sigma < 0$ - napětí má opačný smysl jako vnější normála -

Určení znaménka tečného napětí



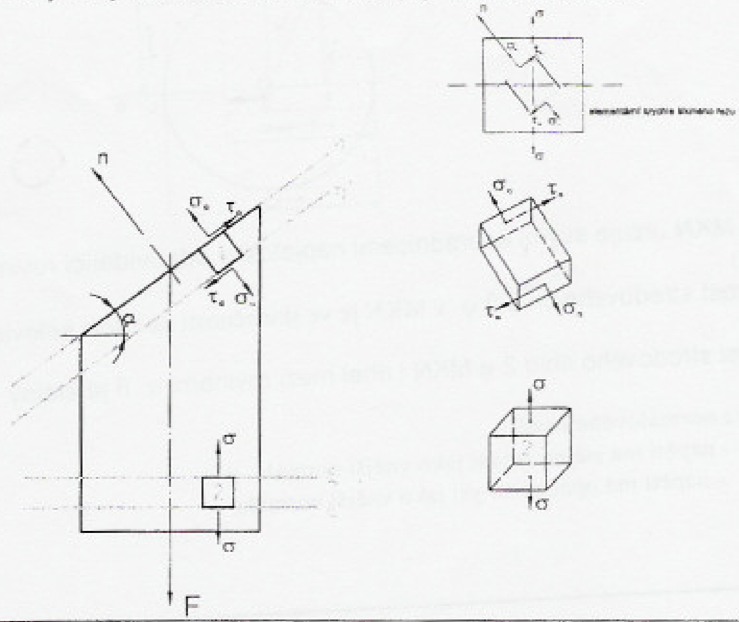


Smysl kladného tečného napětí dostaneme otočením vnější normály o 90° ve směru pohybu ručiček hodinových.

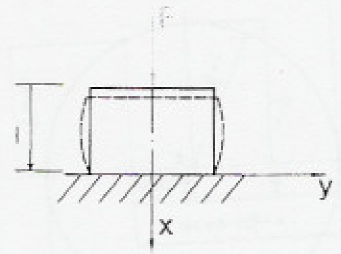
$+\tau$ $0° < \varphi < 90°$

$-\tau$ $90° < \varphi < 180°$

Eulerův myšlený řez na tělese rovinami η, ξ - určení napětí σ, τ



Prostý tlak



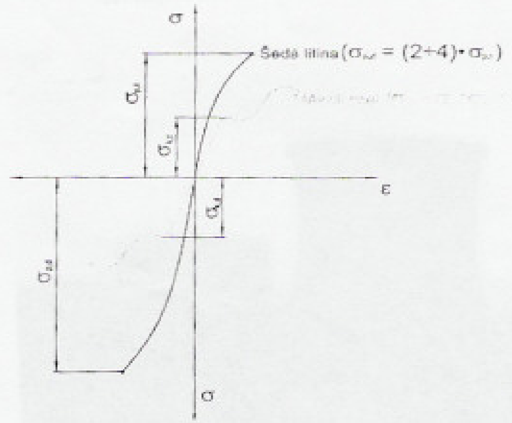
$l < l_{mez} \rightarrow$ tlak

$l > l_{mez} \rightarrow$ vzpěr

Pevnostní podmínka pro tlak

$$\sigma_{d\,\max} = \frac{F}{S} \leq \sigma_{D.d}$$

Diagram zkoušky tahem a tlakem pro litinu a ocel - porovnání

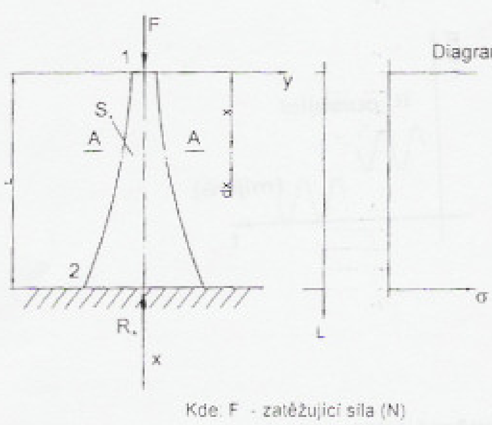


Dřevo má větší pevnost v tahu než v tlaku. $\sigma_{P,t} > \sigma_{P,d}$

$E \cong 10^4$ MPa (podél vláken)

Beton $\sigma_{Pd} = (10 \div 20) \cdot \sigma_{Pt}$

Sloup s konstantním napětím zatížený osovou silou F s uvážením vlastní tíhy



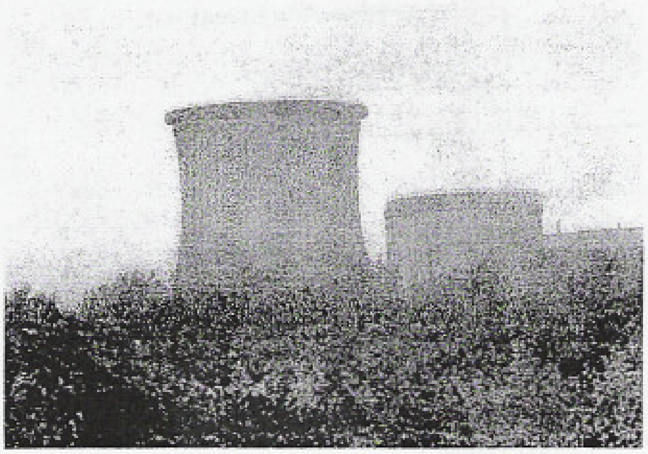
$$S_x = \frac{F}{\sigma_D} \cdot e^{\frac{\gamma \cdot x}{\sigma_D}}$$

Kde: F - zatěžující síla (N)

σ_D-dovolené napětí v tlaku (MPa)

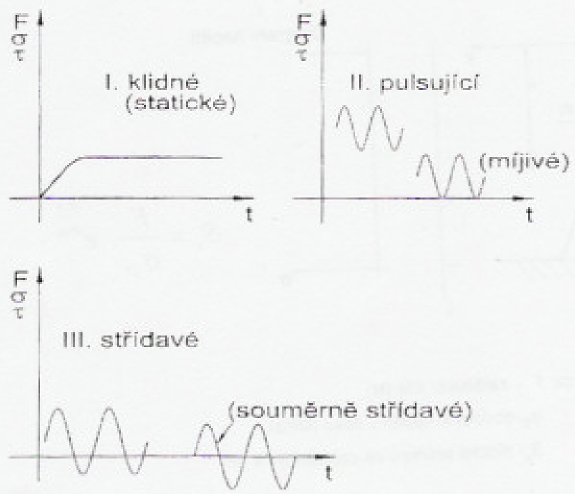
S_x- plocha průřezu ve vzdálenosti x (m)

Příklady dvou různých koncepcí provedení betonových věží



Způsoby namáhání podle prof. BACHA

F = fce (t)



Způsoby namáhání podle prof. BACHA (opravné koeficienty)

Pro výpočet součástí užijeme pevnostní podmínku do které dosadíme pro pulsující a střídavé namáhání **snížené dovolené napětí**

$$\sigma_{t\,max} = \frac{F}{S} \leq \sigma_{d\,t}$$

$$\sigma_{D,t\,II} = (\,0{,}66 \approx 0{,}75\,)\,\sigma_{D,t}$$

$$\sigma_{D,t\,III} = (\,0{,}33 \approx 0{,}5\,)\,\sigma_{D,t}$$

$$\sigma_{D,t\,I} : \sigma_{D,tII} : \sigma_{D,tIII} = 1 : 0{,}75 : 0{,}5$$

Obdobně tomu je i u namáhání tečným napětím

Tabulka dovolených napětí pro vybrané materiály

Materiál				Dovolená napětí v MPa																
Druh	označení	stav	σ_{pt} MPa	tah			tlak		otlačení			ohyb			střih			krut		
				I	II	III	I	II	I	II	III	I	II	III	I	II	III	I	II	III
ocel	11 340	žíh.	340	100	70	35	100	70	90	60	30	100	70	35	70	50	25	60	40	30
ocel	11 370	žíh.	370	120	80	40	120	80	110	70	35	120	80	40	80	56	28	70	46	23
ocel	11 420	[illegible]	420	135	90	45	135	90	120	80	40	135	90	45	90	60	30	72	48	24
ocel	11 500	žíh.	500	150	100	50	150	100	130	88	42	150	100	50	95	64	32	75	50	25
ocel	11 600	žíh.	600	160	110	55	160	110	140	90	45	160	110	55	100	70	35	80	54	27
ocel	11 700	žíh.	700	180	120	60	180	120	150	100	50	180	120	60	120	80	40	90	60	30
ocel	12 040	žíh.	550	130	90	45	130	90	110	70	35	130	90	45	90	60	30	75	50	25
ocel	12 050	žíh.	660	155	105	50	155	105	130	85	43	155	105	50	100	70	35	90	60	30
ocel	12 060	žíh.	720	180	120	60	180	120	150	100	50	180	120	60	120	80	40	100	70	35
šedá litina	42 2415		150	25	17	8	90	60	70	48	24	40	27	13	25	17	8	25	17	8
šedá litina	42 2425		240	40	27	13	105	73	85	57	29	65	43	22	40	27	13	40	27	13
[illegible]	42 3034		300	40	27	13	40	27	35	23	12	40	27	13				30	20	10
[illegible]	42 3210		250	45	30	14	45	30	35	23	12	40	27	13	30	20	10	30	20	10
dřevo měkké		∥	35	15	10	5	7,5	5				10	7	1,5	1					
dřevo měkké		⊥	5				2	1,5							2,5					
dřevo tvrdé		∥	90	18	12	6	9	6				13	9	4,5	2					
dřevo tvrdé		⊥	10				3	2							5					

Poznámka: I – klidné zatížení, II – proměnlivé zatížení, III – střídavé zatížení.

Způsoby namáhání podle prof. BACHA (opravné koeficienty)

Pro výpočet součástí užijeme pevnostní podmínku do které dosadíme pro pulsující a střídavé namáhání **snížené dovolené napětí**

$$\sigma_{t\,max} = \frac{F}{S} \leq \sigma_{d,t}$$

$$\sigma_{D,t\,II} = (\,0{,}66 \approx 0{,}75\,)\,\sigma_{D,t}$$

$$\sigma_{D,t\,III} = (\,0{,}33 \approx 0{,}5\,)\,\sigma_{D,t}$$

$$\sigma_{D,t\,I} : \sigma_{D,t\,II} : \sigma_{D,t\,III} = 1 : 0{,}75 : 0{,}5$$

Obdobně tomu je i u namáhání tečným napětím

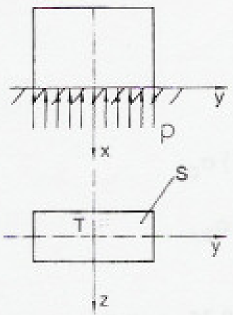
Tabulka dovolených napětí pro vybrané materiály

Materiál				Dovolené napětí v MPa																
Druh	Označení	stav	σ_{Pt} MPa	tah			tlak		stlačení			ohyb			střih			krut		
				I	II	III	I	II	I	II	III	I	II	III	I	II	III	I	II	III
ocel	11 340	tžh.	340	100	70	35	100	70	90	70	30	100	70	35	70	50	25	60	40	20
ocel	11 370	tžh.	370	120	80	40	120	80	110	70	35	120	80	40	80	50	20	50	46	23
ocel	11 [illegible]	tžh.	420	115	90	45	115	90	120	80	40	135	90	45	90	60	30	72	45	24
ocel	11 500	tžh.	500	150	100	50	150	100	130	65	40	150	100	50	96	64	32	75	50	25
ocel	11 600	tžh.	600	160	110	55	160	110	140	90	45	160	110	55	100	70	35	80	54	27
ocel	11 700	tžh.	700	180	120	60	180	120	150	100	50	180	120	60	120	80	40	90	60	30
ocel	12 040	tžh.	550	130	90	45	130	90	110	70	35	130	90	45	90	60	30	75	50	25
ocel	12 050	tžh.	660	155	105	50	155	105	130	86	40	155	105	50	100	70	35	90	60	30
ocel	12 060	tžh.	720	180	120	60	180	120	150	100	50	180	120	60	120	80	40	100	70	35
šedá litina	42 2415		150	25	17	8	90	60	70	48	24	40	27	13	25	17	8	25	17	8
šedá litina	42 2425		240	40	27	13	105	73	95	57	29	65	43	22	40	27	13	40	27	13
[illegible] 93,75	42 3004		300	40	27	13	40	27	35	23	12	40	27	13				30	20	10
mosaz Ms 70	42 3212		250	45	28	14	45	27	35	23	12	40	27	13	30	20	10	30	20	10
dřevo měkké		∥	35	15	10	5	7,5	5				10	7	3,5	1					
dřevo měkké		⊥	5				2	1,5							2,5					
dřevo tvrdé		∥	50	18	13	6	9	6				13	9	4,5	2					
dřevo tvrdé		⊥	10				3	3							3					

Poznámka: I – klidné zatížení, II – proměnlivé zatížení, III – střídavé zatížení.

Tlak ve stykové ploše dvou těles

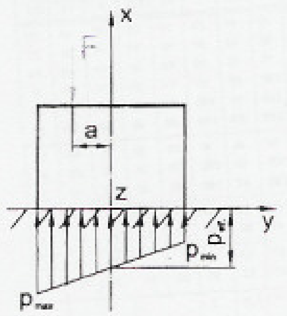
Dříve název měrný tlak nebo otlačení



$$p = \frac{F}{S} = konst.$$

Pokud prochází zatěžující síla F těžištěm rovinné stykové plochy S je tlak p rozložen po celé ploše rovnoměrně.

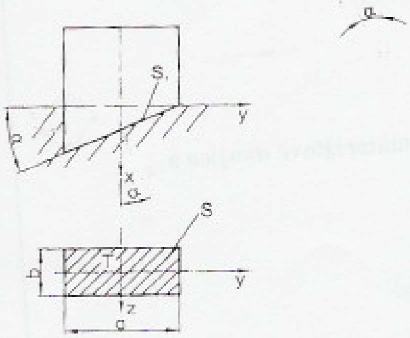
Tlak ve stykové ploše dvou těles (nerovnoměrně rozložený)



$$p_{stř} = \frac{p_{\max} + p_{\min}}{2} = \frac{F}{S}$$

Zatěžující síla F neprochází těžištěm rovinné stykové plochy S , tlak p je rozložen po celé ploše nerovnoměrně rovnoměrně.

Tlak ve stykové ploše dvou těles - definice



$$p = \frac{F_1}{S_1} = \frac{F}{\cos\alpha} \cdot \frac{1}{S_1}$$

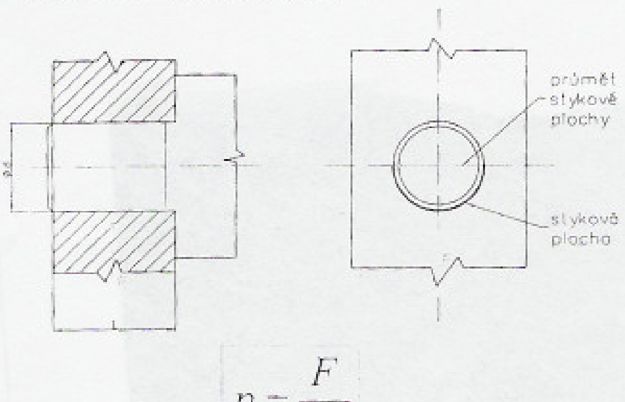
Po dosazení

$$p = \frac{F}{S}$$

Tlak ve stykové ploše dvou těles je roven podílu přítlačné síly a průmětu stykové plochy do roviny kolmé k nositelce této síly.

Uložení: čep – kluzné ložisko

Tlak ve stykové ploše dvou těles je roven podílu přítlačné síly a průmětu stykové plochy do roviny kolmé k nositelce této síly.



$$p = \frac{F}{l.d}$$

Tlak ve stykové ploše dvou těles

Pevnostní podmínka

$p_{max} \leq p_d$

kde:

p_d – dovolený tlak (Pa) – závisí na druhu materiálové dvojice a vzájemném pohybu

$p_{dI} = \sigma_{D,d}$ (méně pevného materiálu)

p_{dII} - volíme podle materiálu dvojice a mazání

např.

kalená ocel – bronz $p_{dII} = 12$ MPa

kalená ocel – kompozice $p_{dII} = 9$MPa