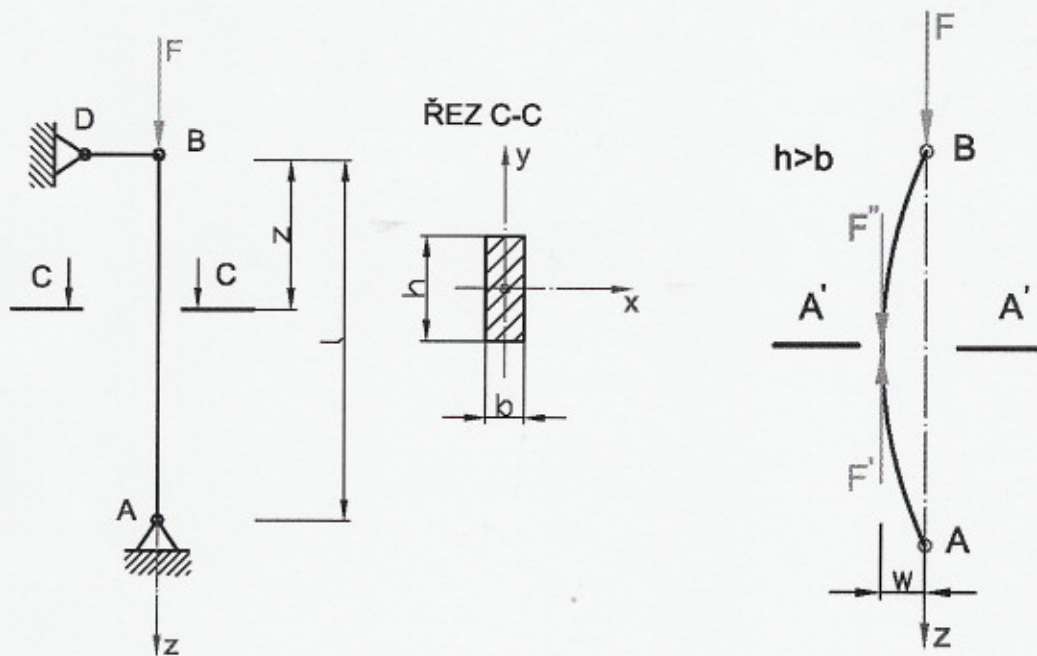


## Vzpěr přímých tyčí

Je zvláštní druh složené pevnosti. Vzniká u dlouhých, štíhlých tyčí zatížených tlakem. Silou  $F$  v ose dlouhé tyče  $x$  se tyč ohne a je namáhána na tlak a ohyb



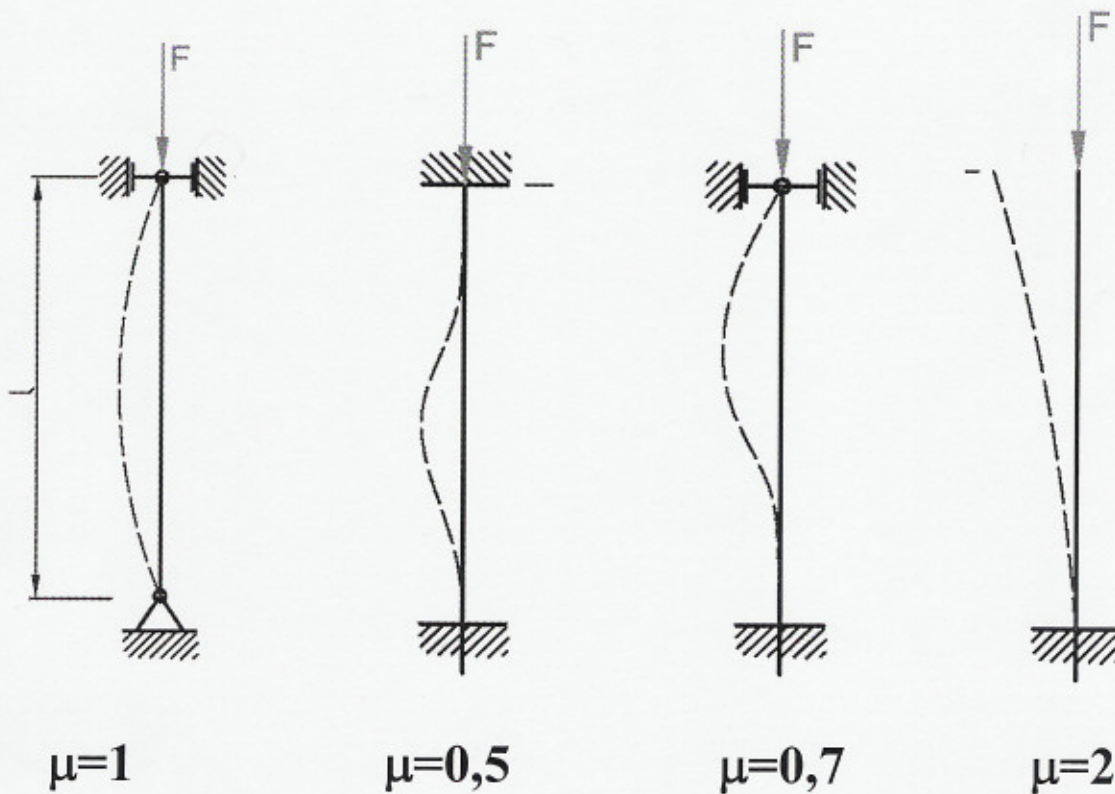
Eulerova rovnice pro pružný vzpěr

$$F_{kr} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot J_{\min}}{l_{red}^2}$$

- Kde:  $F_{kr}$  - síla na mezi pevnosti (N)  
 ( $F > F_{kr}$ ..ohyb se zvětšuje až tyč praskne)  
 $E$  - modul pružnosti v tahu a tlaku (MPa)  
 $l_{red}$  - redukovaná délka tyče (m)  
 $l_{red} = \mu \cdot l$   
 $\mu$  - závislá na uložení obou konců tyče  
 $J_{\min}$  - kvadratický moment průřezu - nejmenší ( $J_y$ )

$$J_x = \frac{bh^3}{12} > J_y = \frac{hb^3}{12}$$

Uložení tyčí namáhaných na vzpěr



Skutečná síla  $F$ , kterou můžeme tyč zatížit je

$$F = \frac{F_k}{n}$$

kde:  $n$  – součinitel bezpečnosti

ocelové vzpěry  $n = 2 - 3$   
 dřevěné vzpěry  $n = 3 - 4$   
 litinové vzpěry  $n = 5 - 6$

Rozměry žádaného průřezu stanovíme z rovnice podle Ruleta

$$F = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot J_{\min}}{n \cdot l_{red}^2}$$

$$\sigma_{Pv} < \sigma_U$$

Výpočet podle Eulera platí pro  $\lambda > \lambda_{mez}$

### štíhlostní poměr

$$\lambda = \frac{l}{i_{\min}} \quad \text{kde: } i - \text{poloměr setrvačnosti}$$

$$i = \sqrt{\frac{J_{\min}}{S}} \quad \begin{array}{l} J_{\min} - \text{kvadratický moment průřezu (minimální)} \\ S - \text{plocha průřezu} \end{array}$$

Pro štíhlostní poměry  $\lambda < \lambda_m$  potom se výpočet řídí rovnicí podle TETMAJERA.

Materiál	$\lambda_m$
Ocel	10 5
Dřevo	10 0
Šedá litina	80
Hliníkové slitiny	60

### rovnice podle TETMAJERA

$$F \leq s \cdot \frac{\sigma_{kr}}{n}$$

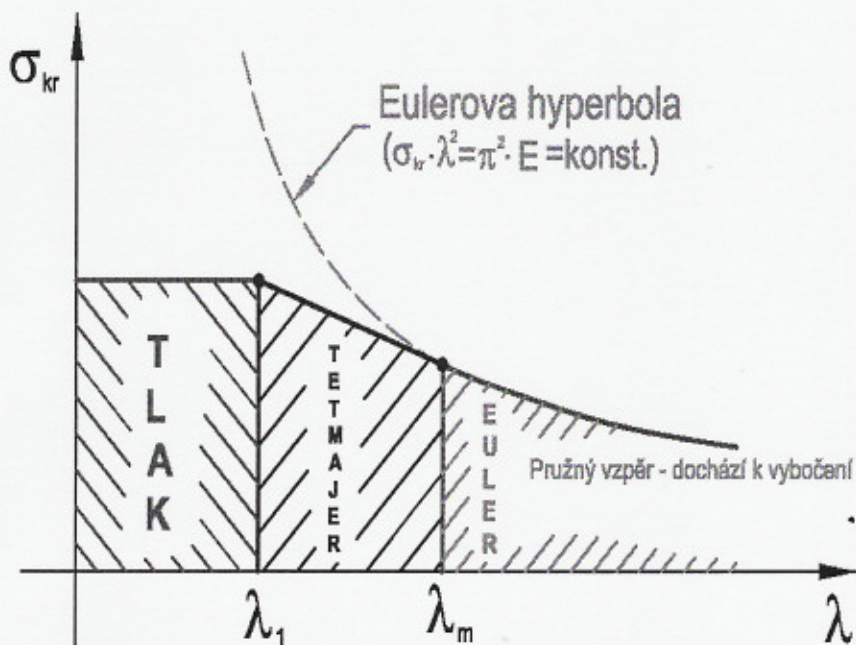
$$\sigma_{kr} = a - b \cdot \lambda + c \cdot \lambda^2$$

$c \cdot \lambda^2$  – platí pouze pro litinu

a, b, c materiálové konstanty

### Materiálové konstanty

Materiál	a	b	c
Měkká ocel (11420)	3100	11,4	-
(11500)	3350	6,2	-
Šedá litina	7760	120	0,53
Dřevo tvrdé	375	2,75	-
Dřevo měkké	293	1,94	-



## Postup výpočtu strojních součástí namáhaných na vzpěr

1) Nejdříve dimenzujeme průřez podle Eulera

$$F_{kv} = \frac{\pi^2 E J_{\min}}{(\mu l)^2} = F \cdot k$$

Vypočteme  $J_{\min}$ , zvolíme průřez – rozměry

2) Vypočteme  $\lambda$

$$\lambda = \frac{l_{red}}{i}$$

3) Porovnáme vypočtené  $\lambda$  s  $\lambda_m$

**Je-li:  $\lambda > \lambda_m$  – výpočet končí (EULER)**

**$\lambda_d < \lambda < \lambda_m$  výpočet podle TETMAJERA**

$$k_v = \frac{\sigma_{kv}}{\sigma_v} = \frac{a - b\lambda}{\frac{F}{S}} \geq k_2$$

$k_2$  – požadovaná míra bezpečnosti

$\lambda_d > \lambda$  – výpočet na tlak

**Výpočet ocelových prutů namáhaných na vzpěr pomocí  
součinitele vzpěrnosti c (ČSN 731401)**

Prostřednictvím součinitele vzpěrnosti c převádíme vzpěr na stejně nebezpečné zatížení tlak ( $\sigma_{red}$ )

$$\sigma_{red} = c \cdot \frac{F}{S} \leq \sigma_{D,d}$$

Kde: F – zatěžující tlaková síla (N)

S – průřezová plocha (m<sup>2</sup>)

c – součinitel vzpěrnosti – závisí na:

štíhlostním poměru  $\lambda$

pevnosti oceli  $\sigma_{P,t}$

Před výpočtem musíme znát všechny rozměry (l, s,  $\lambda$ ...)

**Součinitel vzpěrnosti c – tab.**

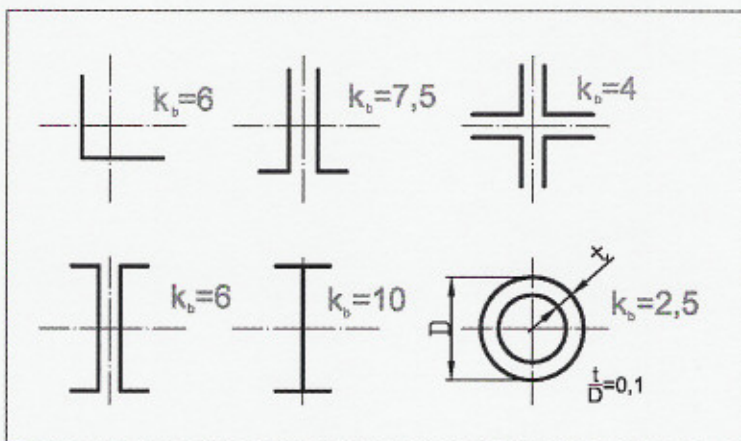
Štíhlost $\lambda$	ocel		Litina	Dřevo
	do 11 423	11 523		
20	1,05	1,05	1,436	1,15
30	1,08	1,09	1,725	1,25
40	1,12	1,14	2,101	1,36
50	1,17	1,21	2,593	1,50
60	1,24	1,32	3,241	1,67
70	1,33	1,47	4,088	1,88
80	1,44	1,68	5,155	2,14
90	1,59	1,95	6,565	2,50
100	1,77	2,26	8,105	3,00
110	1,99	2,63	9,807	3,66
120	2,23	3,03	11,672	4,55
140	2,82	3,97	15,887	6,51
160	3,51	5,05	-	8,91
180	4,30	6,28	-	11,80
200	5,18	7,65	-	15,20

k předběžnému výpočtu plochy průřezu slouží vzorec

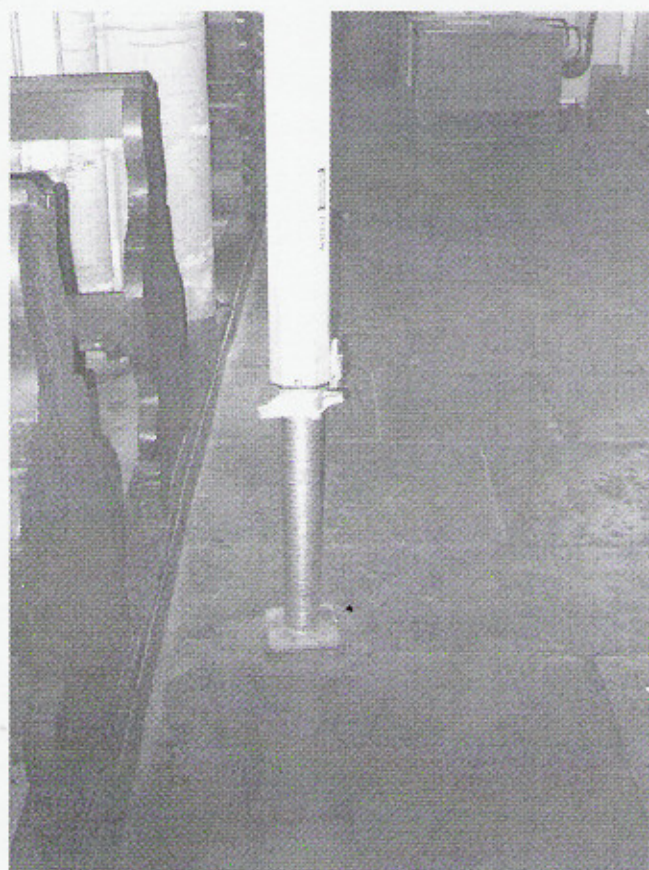
$$S = \frac{F}{140} + 0,577 \cdot 10^{-4} \cdot k_p \quad (\mu l)^2$$

kde:  $k_p$  – součinitel udávající vhodnost tvaru průřezu pro  
vzpěr (rozměry i průřez volit tak, aby  $k_p$  – malá

$$k_p = \frac{S^2}{J_{\min}}$$

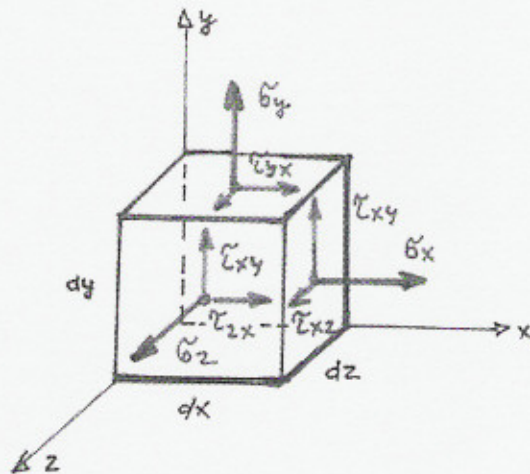


### Příklady z technické praxe



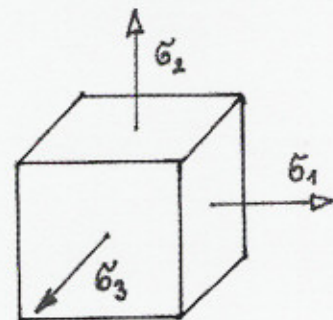
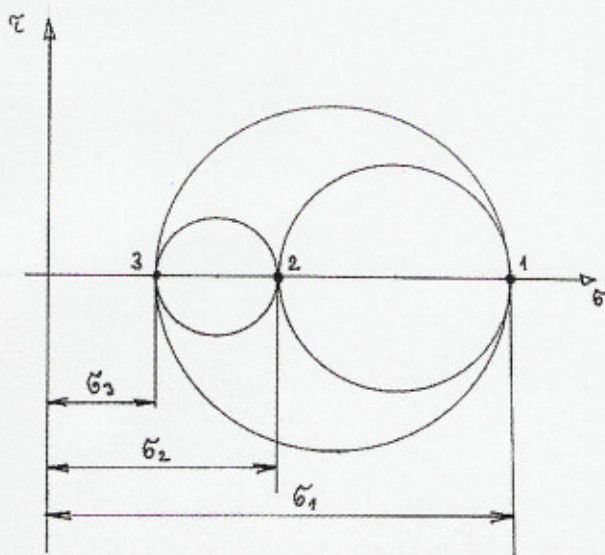
## Prostorová napjatost

Je obecně určena šesti složkami napětí  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, (\tau_{yx}), \tau_{yz}, (\tau_{zy}), \tau_{xz}, (\tau_{zx})$



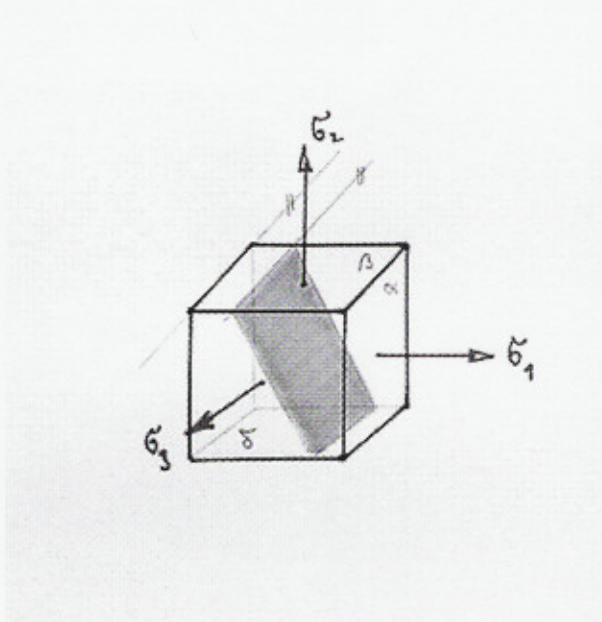
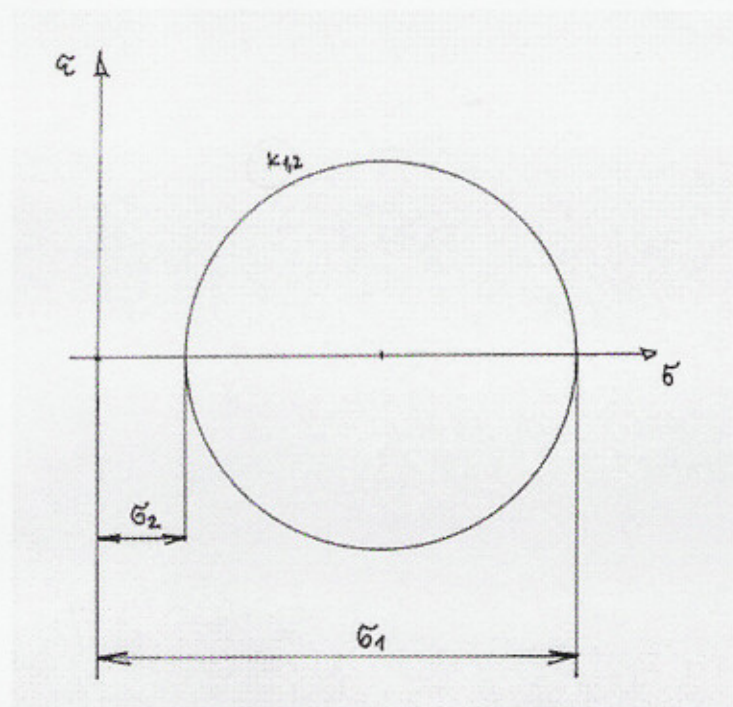
### Mohrova kružnice napětí pro prostorovou napjatost

Při této napjatosti existují vždy tři hlavní napětí  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  působící ve třech hlavních rovinách (smyková napětí jsou rovny nule). Domluva označení napětí  $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$



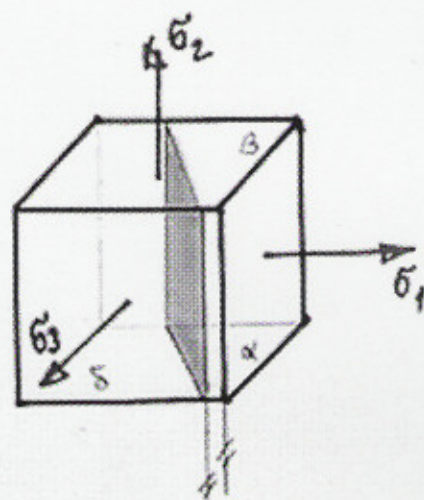
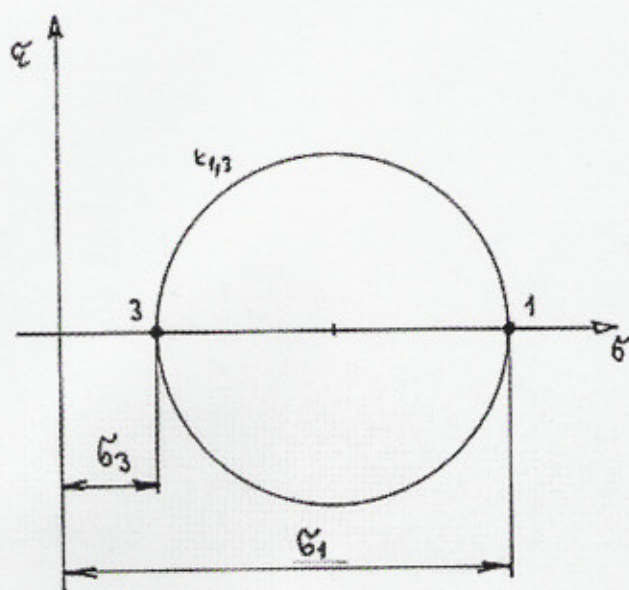


Mohrova kružnice napětí pro roviny kolmé na rovinu hl. napětí  $\sigma_3$



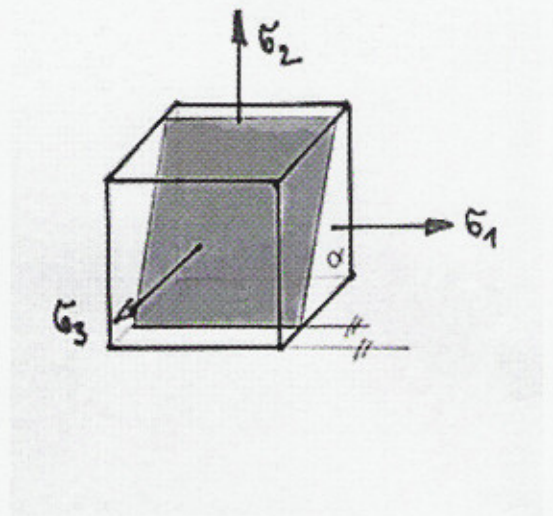
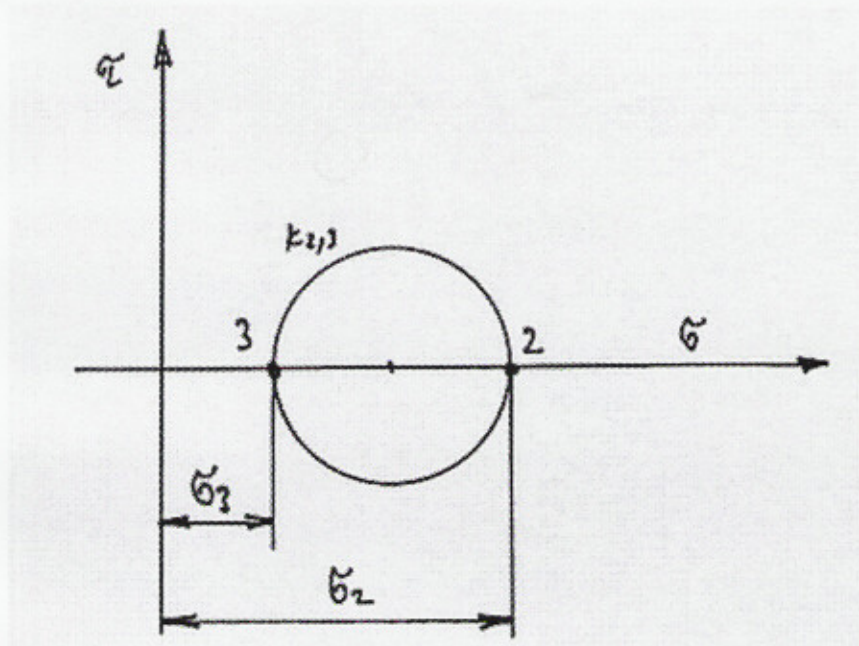
Napjatost v těchto rovinách udává kružnice  $k_{1,2}$

Mohrova kružnice napětí pro roviny kolmé na rovinu hl. napětí  $\sigma_2$



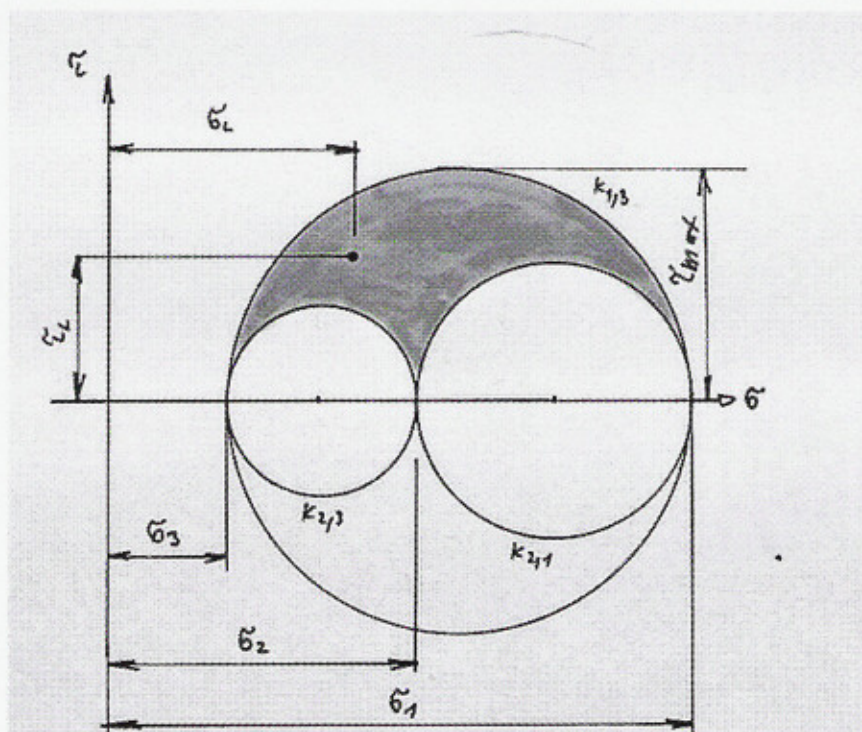
Napjatost v těchto rovinách udává kružnice  $k_{1,3}$

Mohrova kružnice napětí pro roviny kolmé na rovinu hl. napětí  $\sigma_1$



Napjatost v těchto rovinách udává kružnice  $k_{2,3}$   
 Mohrova kružnice napětí pro prostorovou napjatost

Napětí v obecných řezech jsou určena souřadnicemi bodů uvnitř vyšrafované plochy



$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$$

### Deformace při trojosé napjatosti

Dáno:  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_x, \tau_y, \tau_z$

Výpočet podle rozšířeného Hookeůva zákona

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} / \sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z) /$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} / \sigma_y - \mu(\sigma_z + \sigma_x) /$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} / \sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y) /$$

Dále platí:  $\gamma_x = \frac{\tau_x}{G}$

$$\gamma_y = \frac{\tau_y}{G}$$

$$\gamma_z = \frac{\tau_z}{G}$$

## Složené namáhání přímých součástí

Působí současně dvě nebo více druhů namáhání

a) Kombinace namáhání (normálové napětí  $\sigma$ )

TAH (TLAK), OHYB, ŠIKMÝ OHYB

b) Kombinace namáhání (smykové napětí  $\tau$ )

SMYK, KRUT

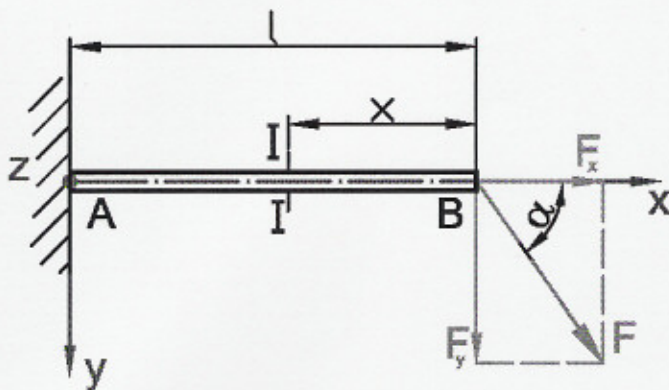
c) Kombinace namáhání (normálové napětí  $\sigma$  + smykové napětí  $\tau$ )

OHYB + KRUT

K řešení je nutno použít hypotezy

K řešení je nutno použít hypotezy

Ohyb + tah



$$F_x = F \cdot \cos\alpha$$

$$F_y = F \cdot \sin\alpha$$

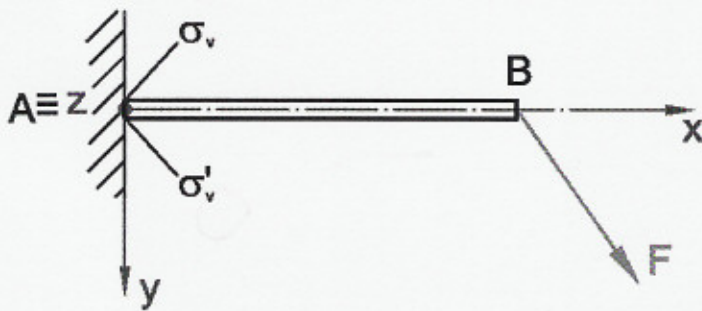
V libovolném průřezu I-I vzniká napětí

Tahové

$$\sigma_t = \frac{Fx}{S}$$

Ohybové

$$\sigma_o = \frac{M_o}{W_o} = \frac{F_y \cdot x}{W_o}$$



Nahoře nad osou x

$$\sigma_v = \sigma_t + \sigma_0$$

$$\sigma_v = \frac{Fx}{S} + \frac{M_0}{W_0}$$

Dole pod osou x

$$\sigma'_{v} = \sigma_t - \sigma_0$$

$$\sigma'_{v} = \frac{Fx}{S} - \frac{M_0}{W_0}$$

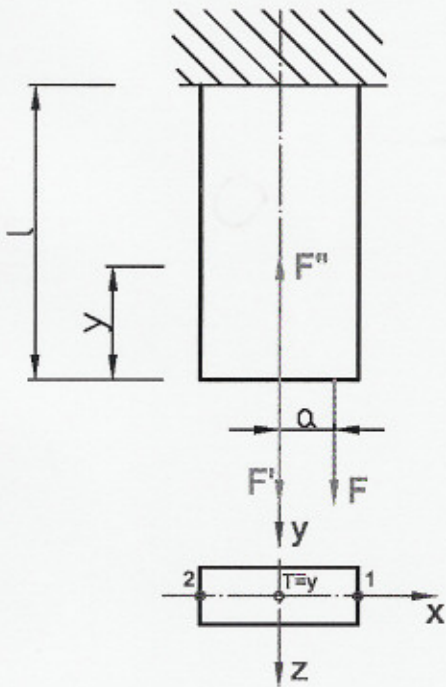
$$\sigma_{D,t} > \sigma_v$$

$\sigma_{D,t}$  - dovolené napětí v tahu (MPa)

$\sigma_v$  - výsledné normálové napětí (MPa)

$\sigma_{max}$  - maximální napětí v místě (A) nad osou x ( $\sigma_v$ )

## Excentrický tah



Tyč je namáhána:

Na TAH .....od silou  $F' = F$

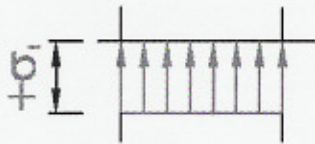
$$\sigma_t = \frac{F}{S}$$

Na OHYB ....od momentu silové dvojice

$$\sigma_0 = \frac{M_0}{W_0}$$

$$\sigma_0 = \frac{F \cdot a}{W_0}$$

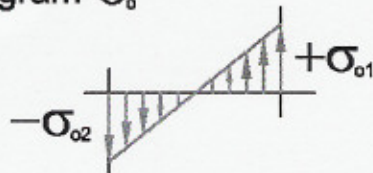
Diagram tahového napětí  $\sigma_t$



Výsledné napětí

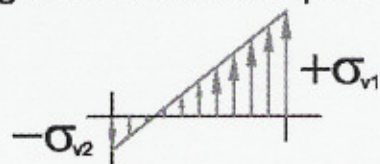
$$\sigma_{v1} = \sigma_t + \sigma_0$$

Diagram  $\sigma_0$



$$\sigma_{v1} = \frac{F}{S} + \frac{M_0}{W_0}$$

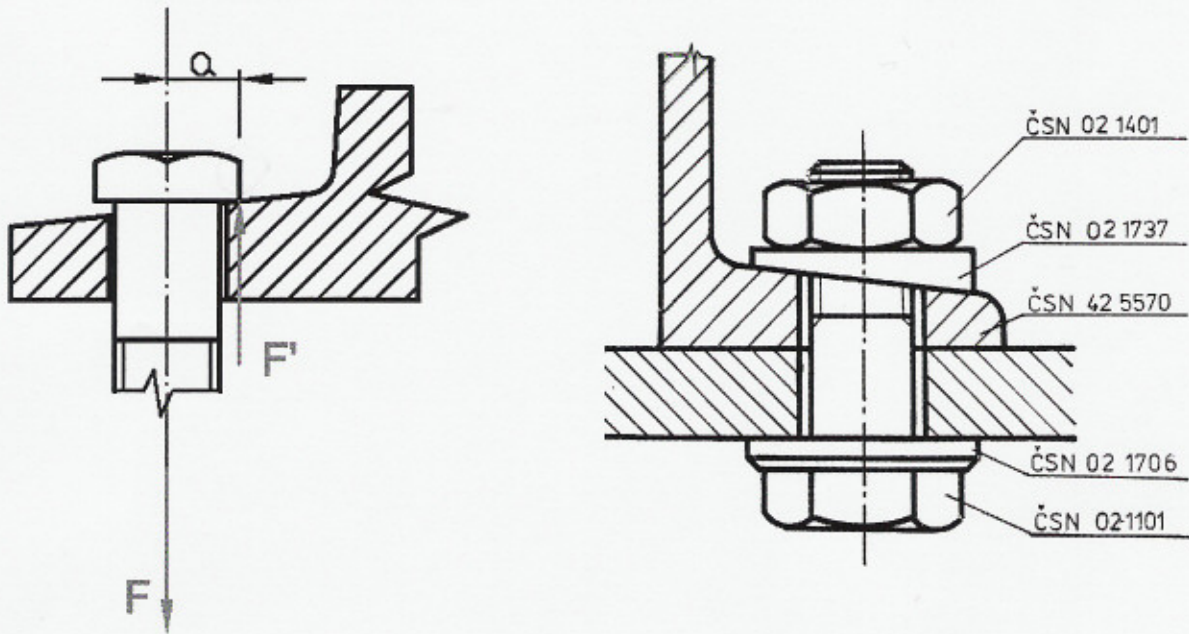
Diagram tahového napětí  $\sigma_v$



$$\sigma_{v2} = \sigma_t - \sigma_0$$

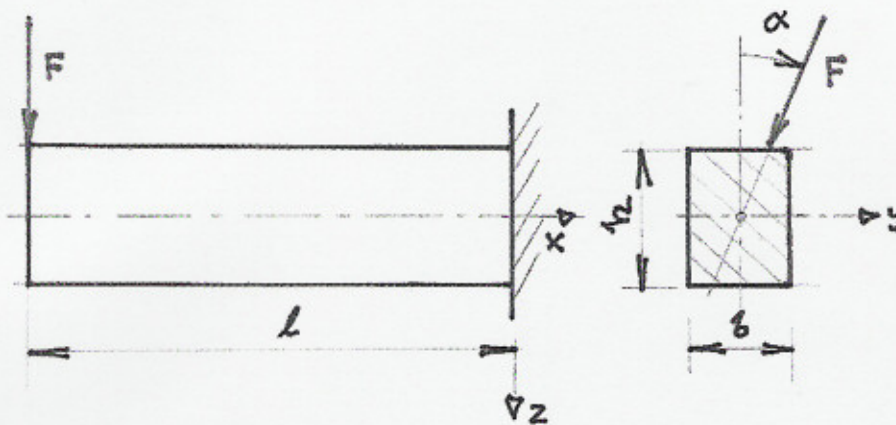
$$\sigma_{v1} > \sigma_{v2}$$

## Příklady z technické praxe



### Šikmý ohyb

Příklad-nosník zatížený silou  $F$ , která prochází těžištěm průřezu a není rovnoběžná s osou  $z$ .



Neutrální osa ( $y$ ) již není kolmá ke stopě ohybového momentu

Zatěžující sílu  $F$  rozložíme do složek  $F_x$  a  $F_y$

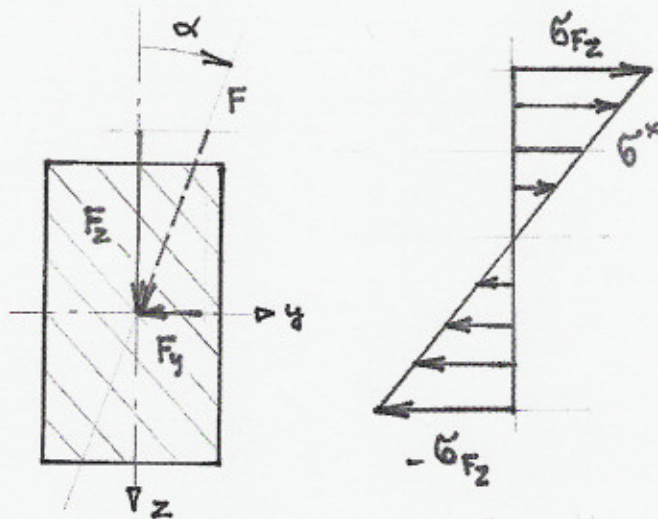
$$F_z = F \cdot \cos \alpha$$

$$F_y = F \cdot \sin \alpha$$

Síla  $F_z$  způsobí napětí

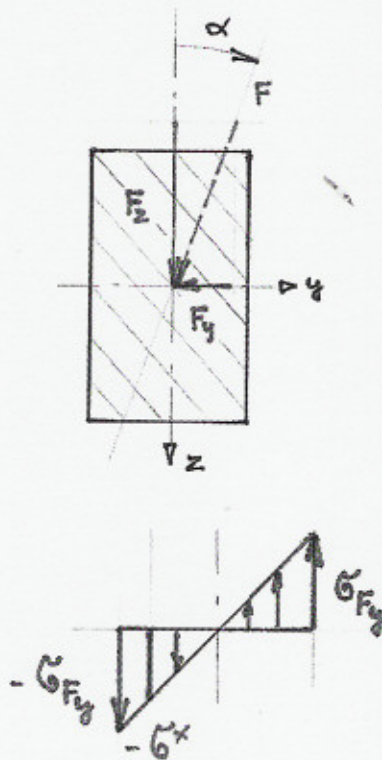
$$\sigma_{F_z} = \frac{F_z \cdot l}{\frac{J_y}{z}}$$

$$\sigma_{F_z} = \pm \frac{F l \cos \alpha}{\frac{1}{6} b h^2}$$



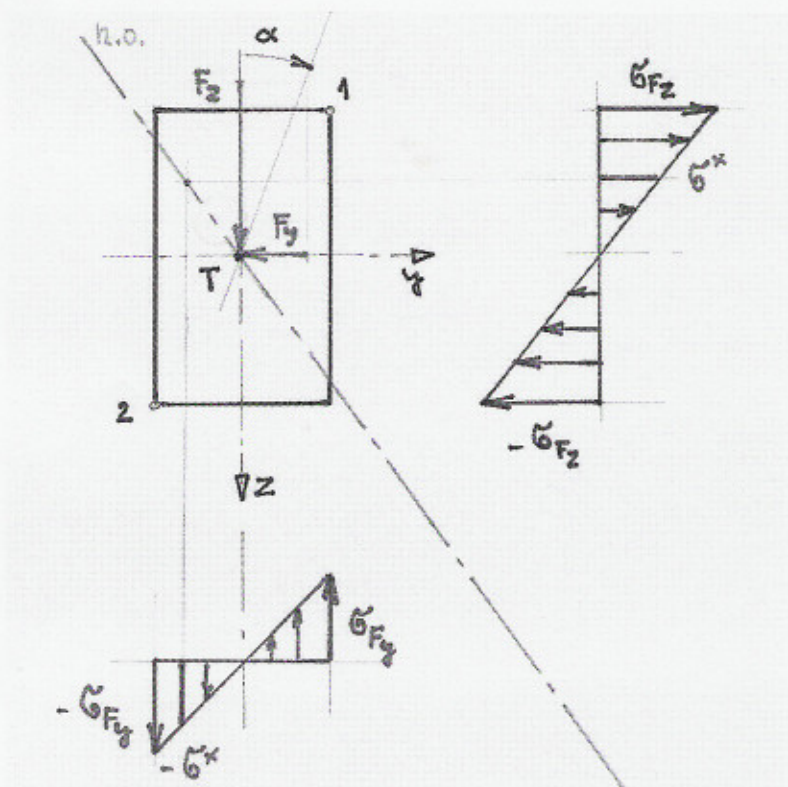
Síla  $F_y$  způsobí napětí

$$\sigma_{F_y} = \pm \frac{F l \sin \alpha}{\frac{1}{6} b^2 h}$$





## Stanovení polohy neutrální osy (n.o.)

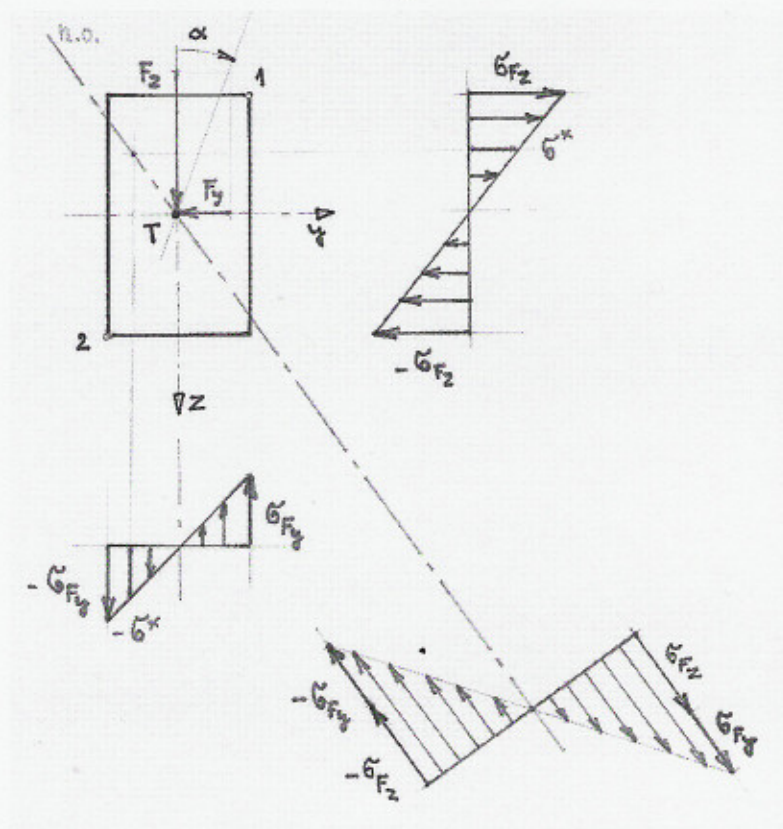


## Výpočet maximálního napětí

$$\sigma_1 = \sigma_{F_x} + \sigma_{F_y}$$

$$\sigma_1 = \sigma_{\max}$$

$$\sigma_1 = \frac{6Fl}{bh} \left( \frac{\cos \alpha}{h} + \frac{\sin \alpha}{b} \right)$$



## Šikmý ohyb – deformace

Deformace ve směru osy x

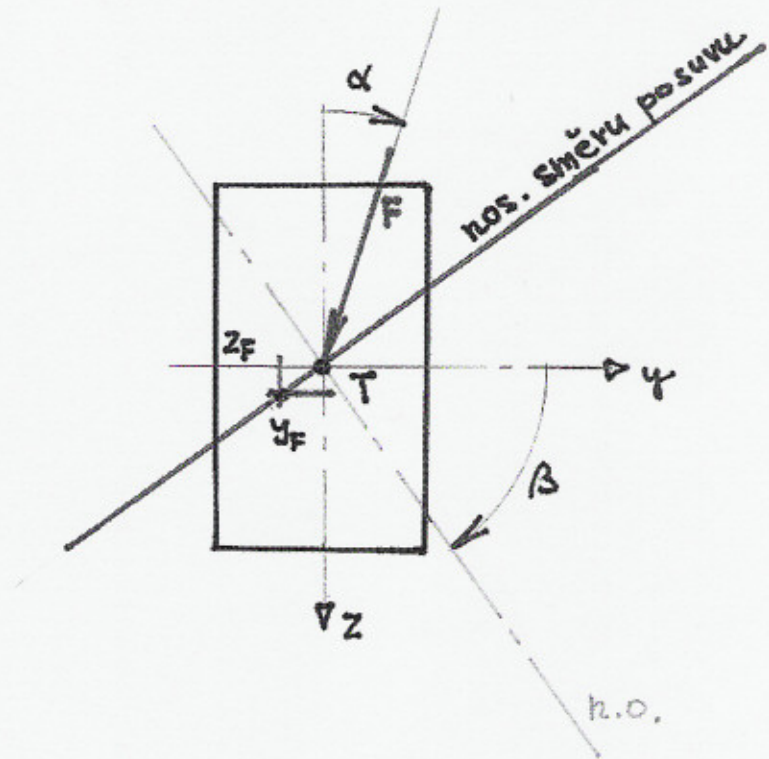
$$y_F = \frac{F_y l^3}{3EJ_z}$$

Deformace ve směru osy z

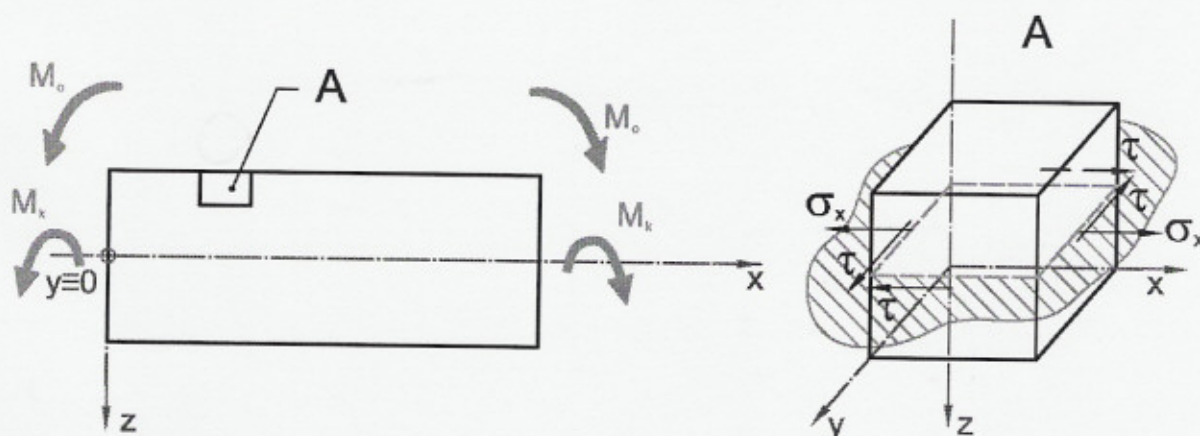
$$z_F = \frac{F_z l^3}{3EJ_y}$$

Celková deformace

$$w_v = \sqrt{(y_F^2 + z_F^2)}$$



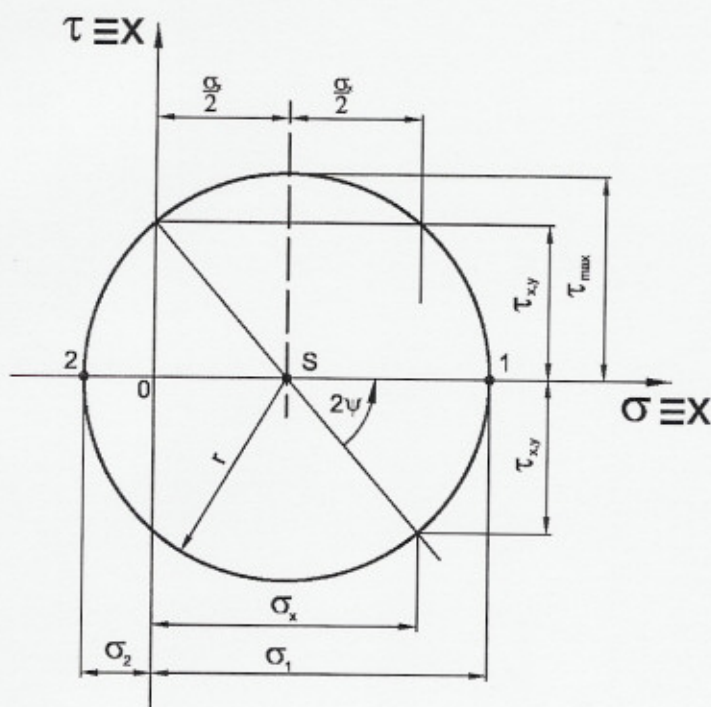
## Složené namáhání OHYB + KRUT



Při složeném namáhání OHYB + KRUT je součást namáhána rovinou napjatostí  $(\sigma_1, \sigma_2)$ . Při složitějších případech kombinovaného namáhání může nastat prostorová napjatost.

### OHYB + KRUT

Hřídel namáhána složeným namáháním OHYB + KRUT – rovinná napjatost  $(\sigma_1, \sigma_2)$



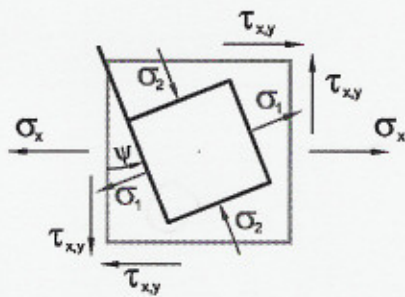
$$\sigma_1 = \overline{OS} + r$$

$$\sigma_2 = \overline{OS} - r$$

$$r^2 = \left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2$$

$$r = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$



$$\sigma_2 < 0$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_x}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$$

$$\sigma_1 > 0$$

### Hypotezy pevnosti pro složené namáhání ohyb + krut

Vztahy pro dimenzování součástí namáhaných tečným a normálovým napětím ( $\sigma, \tau$ ) lze získat vypočtením tzv. fiktivního napětí, které je stejně nebezpečné jako napětí skutečná. Fiktivní napětí ( $\sigma_{\text{red}}$ ) jsou určována podle hypotez.

#### Křehké materiály

- Rankinova hypoteza (max. normálového napětí)
- Saint-Venantova hypoteza (max. poměrného prodloužení)
- Mohrova hypoteza mezní čáry
- Coulombova hypoteza

$$\sigma_{\text{red}} = \sigma_1 - \chi \cdot \sigma_3 < \sigma_{D,t}$$

$$\chi = \frac{\sigma_{D,t}}{\sigma_{D,d}}$$

## Hypotezy pevnosti pro složené namáhání ohyb + krut

### Tvárné materiály

- Beltraniova hypoteza (obj. hustoty energie napjatosti)
- Guestova hypoteza (max.tečného napětí)  
vhodná pro výpočet ocelových součástí

$$\sigma_{red} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq \sigma_{D,t,III}$$

$$M_{ored} = \sqrt{M_o^2 + M_k^2} \leq W_o \cdot \sigma_{D,O,III}$$

### Tvárné materiály

- Misesova hypoteza (výpočet ocelových konstrukcí)

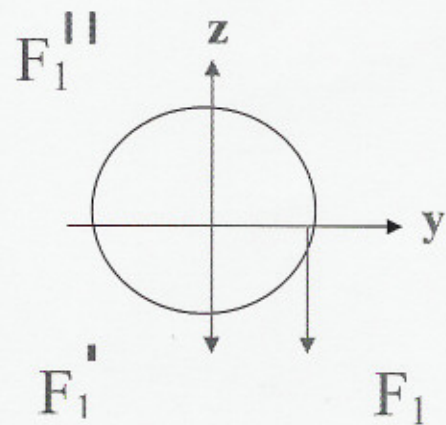
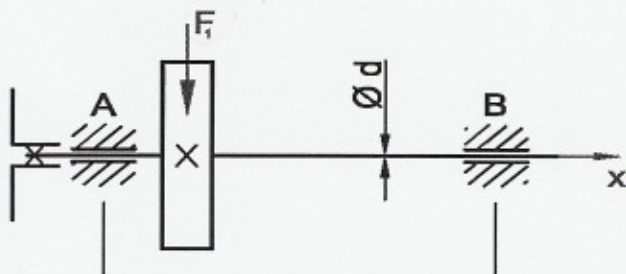
$$\sigma_{red} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq \sigma_{D,t,III} \quad M_{ored} = \sqrt{M_o^2 + 0,75M_k^2} \leq W_o \cdot \sigma_{D,t,III}$$

Výpočet podle hypotez je možno považovat za předběžný. Součást namáhaná cyklickým namáháním se poruší dříve vlivem únavového lomu.

Výpočet hřídelů přenášejících  $M_k$ ,  $M_o$

### Diagram $M_k$





1) Krut

$$M_k = \frac{P}{\omega} \quad \tau_{D,k} = \frac{M_k}{W_k} \Rightarrow \varnothing d$$

2) Ohyb  $M_{\text{omax}}$  - vis. řešení zadaného nosníku

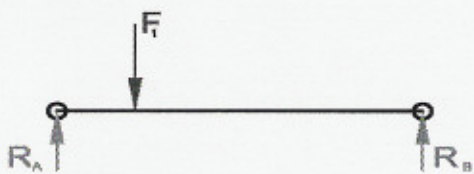
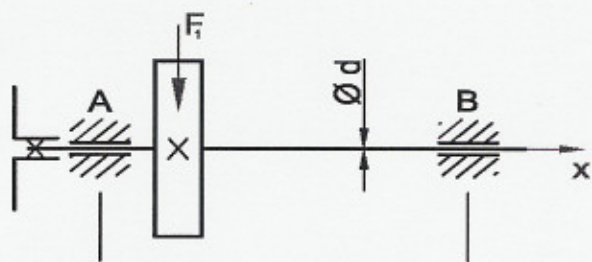
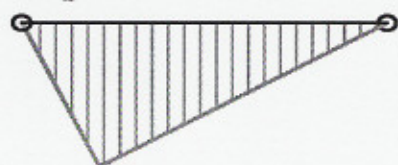


Diagram  $M_0$



$$\sigma_0 = \frac{M_{\text{max}}}{W_0}$$

Výpočet podle Misesovy hypotezy

$$M_{ored} = \sqrt{M_{omax}^2 + 0,75M_k^2}$$

$$\sigma_{0,0,III} \geq \frac{M_{ored}}{W_0} \Rightarrow d(\text{průměr hřídele})$$

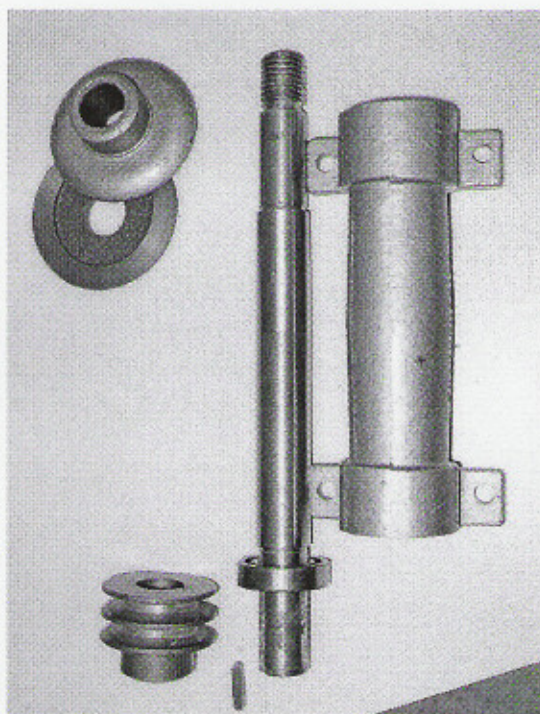
$$\sigma_{red} = \sqrt{\sigma_0^2 + 3\tau^2}$$

$$\sigma_{red} \leq \sigma_{D,t,III}$$

Ocelová hřídel reduktoru pro přenos výkonu namáhání ohyb + krut



Vřeteno cirkulárky

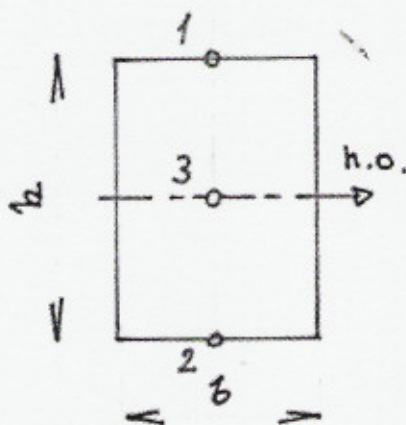




## Vliv posouvající síly na napjatost při ohybu

Při výkladu prostého ohybu jsme vědomě zanedbali vliv tečných napětí v řezech kolmých k ose nosníku od posouvajících sil.

### Obdélníkový průřez

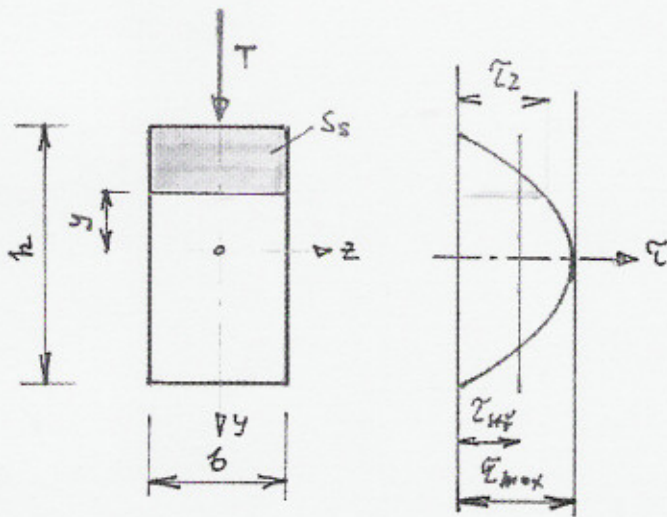


Předpokládáme, že smyková napětí  $\tau$  jsou rovnoběžná se směrem posouvajících síly  $T$  a že jsou stejná po celé šířce obdélníka  $b$

Výpočet tečných napětí provedeme podle Žurkovského vzorce.



## Žurkovského vzorec pro výpočet tečných napětí



$$\tau_z = \frac{T \cdot S_s}{J_z \cdot b}$$

$$\tau_{stř} = \frac{T}{S}$$

$$\tau_{max} = \frac{3}{2} \tau_{stř}$$

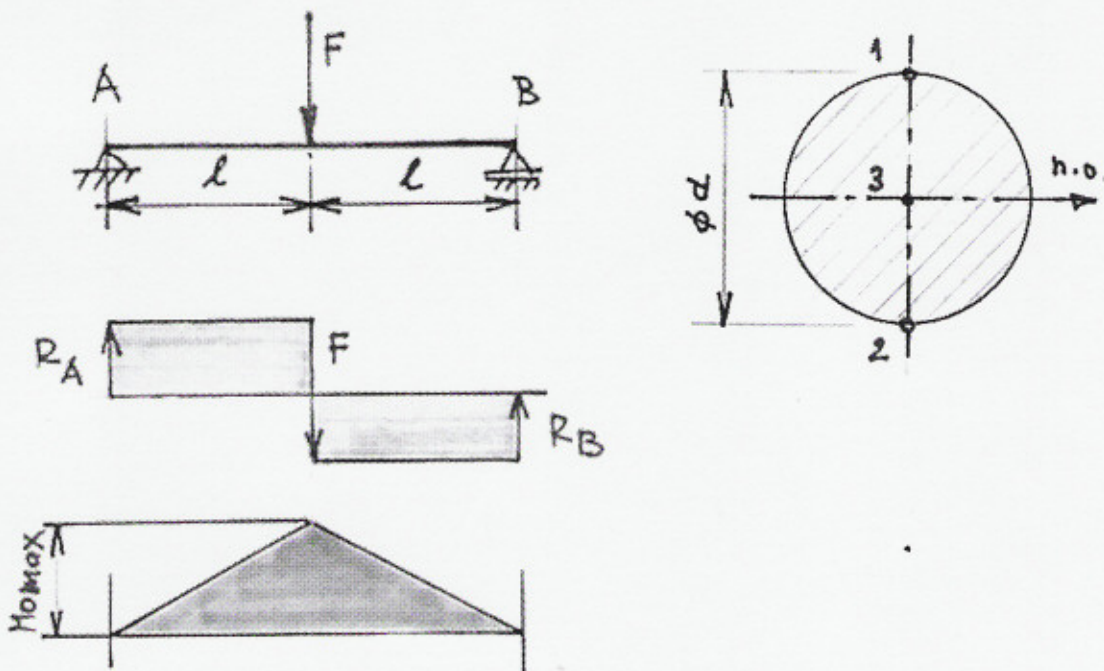
Kde:  $T$  – posouvající síla

$S_s$  – statický moment části průřezu k neutrální ose ( $z$ )

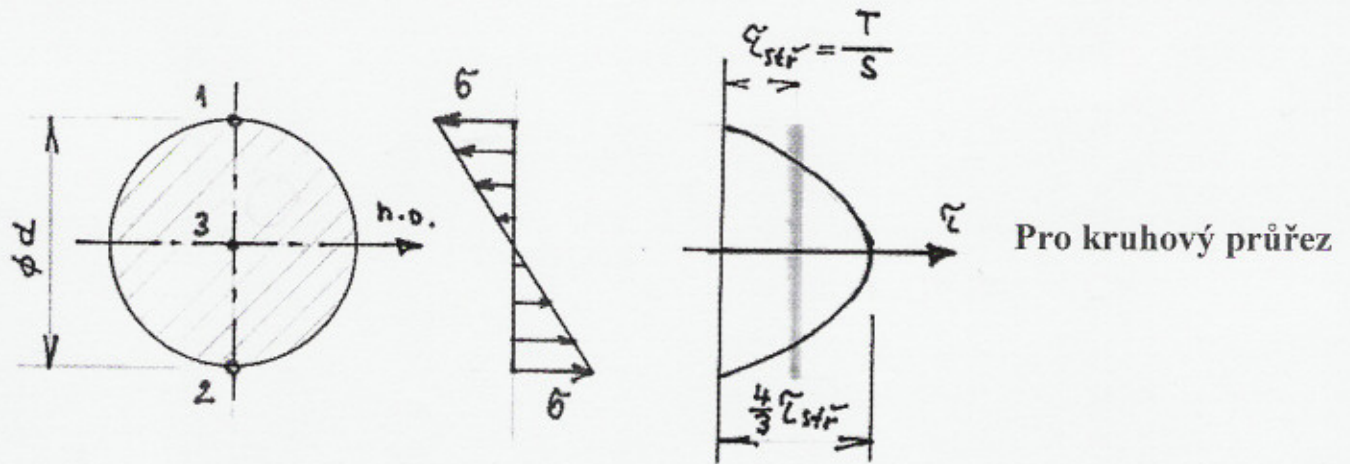
$J_z$  – kvadratický moment průřezu k n.o.

$b$  – šířka obdélníka

Řešení nosníku zatíženého silou  $F$  s uvážením vlivu tečných napětí



Řešení nosníku zatíženého silou F s uvážením vlivu tečných napětí



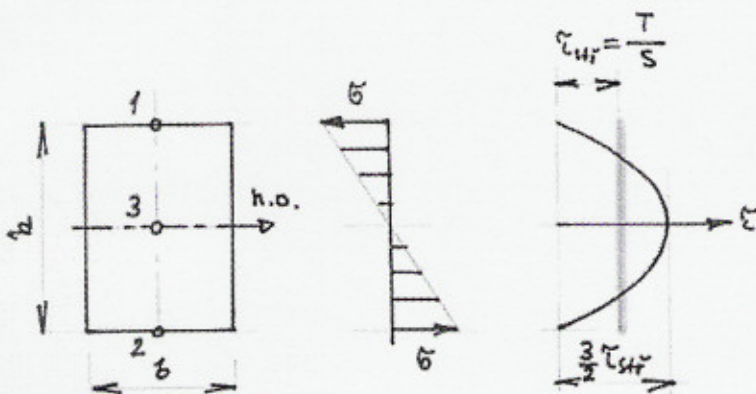
Pro kruhový průřez

$$\sigma_{red1} = \sigma_1 = \frac{M_0}{W_0} \quad \tau_1 = 0, \quad \sigma_{red1} = \sigma_1$$

$$\sigma_{red2} = \sigma_2 = \frac{M_0}{W_0} \quad \tau_2 = 0, \quad \sigma_{red2} = \sigma_2$$

$$\sigma_3 = 0, \quad \tau_3 = \frac{4}{3} \tau_{stř}$$

$$\sigma_{red3} = \alpha \cdot \frac{4}{3} \tau_{stř}$$



Pro obdélníkový průřez

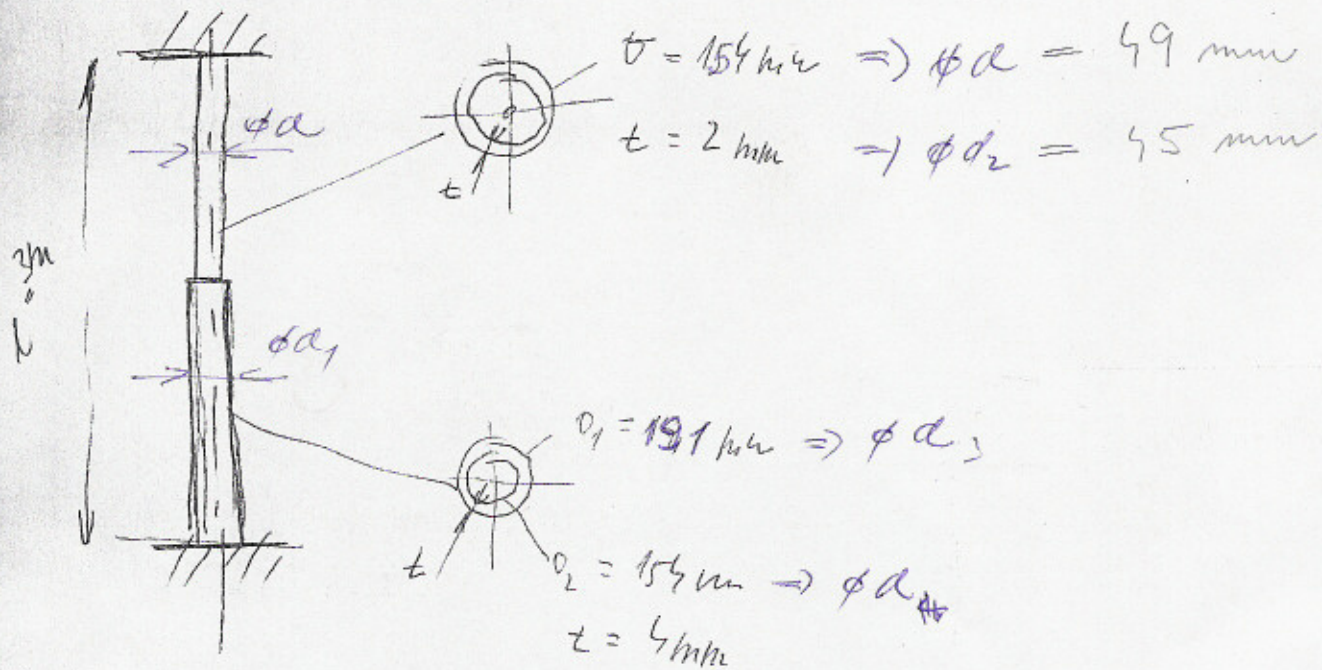
$$\sigma_{red1} = \sigma_1 = \frac{M_0}{W_0} \quad \tau_1 = 0$$

$$\sigma_{red2} = \sigma_2 = \frac{M_0}{W_0} \quad \tau_2 = 0,$$

$$\sigma_3 = 0, \quad \tau_3 = \frac{3}{2} \tau_{stř}$$

$$\sigma_{red3} = \alpha \cdot \frac{3}{2} \tau_{stř}$$

Pr. 26



Pr. 27

